

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
Кафедра ПОВТ и АС

## Алгебра логики

Методические указания к практическим занятиям по курсу «Введение в  
математическую логику»

Ростов- на- Дону

2011

Составитель ст. преподаватель О.В. Ляхницкая,

Методические указания предназначены для студентов специальности 090102 «Компьютерная безопасность», 230105 «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем», 230102 «Автоматизированные системы управления» и преподавателей, ведущих практические занятия по курсу «Введение в математическую логику»; в них содержатся краткие сведения о логических операциях над высказываниями, равносильных формулах алгебры логики, рассматривается понятие двойственности, представлены алгоритмы приведения функций алгебры логики к СДНФ и СКНФ, а также приведены примеры применения алгебры логики в технике.

Рецензент: д.т.н. Кобак В.Г.

## Логические операции над высказываниями.

### 1. Отрицание. Отрицанием высказывания $x$ называется новое высказывание

$\bar{x}$ , которое истинно тогда и только тогда, когда  $x$  ложно, и ложно, если высказывание  $x$  истинно.

$x$	$\bar{x}$
0	1
1	0

2. Конъюнкция (логическое умножение). Конъюнкцией двух высказываний  $x$  и  $y$  называется новое высказывание  $x \wedge y$ , которое считается истинным, если оба высказывания  $x$  и  $y$  истинны, и ложным во всех остальных случаях.

Таблица истинности операции конъюнкции имеет следующий вид:

$x$	$y$	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. Дизъюнкция (логическое сложение). Дизъюнкцией двух высказываний  $x$  и  $y$  называется новое высказывание  $x \vee y$ , которое считается ложным, если оба высказывания  $x$  и  $y$  ложны, и истинным во всех остальных случаях.

Эту операцию наглядно можно изобразить с помощью таблицы истинности:

$x$	$y$	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

4. Импликация. Импликацией двух высказываний  $x$  и  $y$  называется новое высказывание  $(x \rightarrow y)$ , которое считается ложным, если  $x$ - истинно, а  $y$ - ложно, и истинным во всех остальных случаях.

Высказывание  $x$  называют посылкой, а  $y$  – заключением.

Таблица истинности имеет следующий вид:

$x$	$y$	$(x \rightarrow y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

**5. Эквиваленция.** Эквиваленцией двух высказываний  $x$  и  $y$  называют новое высказывание  $x \leftrightarrow y$ , которое считается истинным, когда оба высказывания  $x$  и  $y$  либо одновременно истинны, либо одновременно ложны..

Эту операцию наглядно можно изобразить с помощью таблицы истинности.

$x$	$y$	$x \leftrightarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Символы  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$  называются позиционными связками. Логическим связкам приписывают ранги в следующем порядке убывания старшинства:  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ . Таким образом, связка более высокого ранга имеет большую область действия.

Существуют операции, с помощью которых может быть выражена любая из пяти логических операций, рассмотренных выше. Таковыми операциями являются:

**1. Штрих Шеффера** (читается «А несовместно с В»). Эта операция обозначается  $x|y$  и определяется следующей таблицей истинности.

$x$	$y$	$x y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Имеет место следующее равенство  $x | y = \overline{x \wedge y}$

**2. Стрелка Пирса**(читается «ни А, ни В»). Эта операция обозначается  $x \downarrow y$  и определяется следующей таблицей истинности.

$x$	$y$	$x \downarrow y$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Имеет место следующее равенство  $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$

**3. Сложение по модулю два** (исключающее или). Эта операция обозначается  $x \oplus y$  и определяется следующей таблицей истинности.

$x$	$y$	$x \oplus y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Имеет место следующее равенство  $x \oplus y = \overline{x \leftrightarrow y}$

**1. Составить таблицы истинности для формул:**

- 1)  $(x \rightarrow y) \oplus ((y \rightarrow \bar{z}) \rightarrow x \cdot y);$
- 2)  $(x \vee \bar{y}) \downarrow (\bar{x} \rightarrow (y \rightarrow \bar{z}));$
- 3)  $(x \vee (y \rightarrow z)) \cdot (x \oplus y);$
- 4)  $\overline{(x \downarrow y) \vee (x \sim z)} | (x \oplus y \cdot z);$
- 5)  $\bar{x} \cdot (y \cdot z) \vee \overline{x \rightarrow z};$
- 6)  $((x \vee y) \cdot \bar{z} \rightarrow ((x \sim \bar{z}) \oplus \bar{y})) \cdot ((x \oplus y) \cdot \bar{z});$
- 7)  $(x \rightarrow y \& z) \& \overline{x \rightarrow y};$
- 8)  $(\bar{x} \vee y) \rightarrow ((y | \bar{z}) \rightarrow (x \sim x \cdot z));$
- 9)  $xy \vee (\overline{x \rightarrow x\bar{y}} \rightarrow z);$
- 10)  $(x | \bar{y}) \rightarrow ((y \downarrow \bar{z}) \rightarrow (x \oplus z));$
- 11)  $x \cdot (y \cdot z) \oplus (\bar{x} \rightarrow z);$
- 12)  $((x | y) \downarrow \bar{z}) | y \downarrow (\bar{y} \rightarrow z);$
- 13)  $((x | y) \downarrow (y | \bar{z})) \cdot (x \rightarrow (y \rightarrow z));$
- 14)  $(x \cdot y \rightarrow z) \vee ((x \downarrow y) | z);$
- 15)  $((x \rightarrow y \cdot z) \oplus (x \sim y)) \vee (y \rightarrow x \cdot z);$
- 16)  $\overline{x \oplus y \cdot z \cdot \bar{y}} \rightarrow x \cdot z \cdot (\bar{x} \downarrow y).$

**2. Выяснить, являются ли формулы тождественно истинными, тождественно ложными или выполнимыми:**

- 1)  $\overline{\overline{x \vee y} \rightarrow \overline{x \wedge y}}$
- 2)  $((x \rightarrow y) \wedge x) \rightarrow y$
- 3)  $((x \leftrightarrow y) \wedge \bar{x}) \rightarrow \bar{y}$
- 4)  $((x \vee y) \leftrightarrow z) \leftrightarrow (y \rightarrow x)$
- 5)  $((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z)) \rightarrow (x \rightarrow z)$
- 6)  $\overline{(x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee y \rightarrow z))}$
- 7)  $(x \rightarrow y) \rightarrow ((x \vee z) \rightarrow (y \vee z))$
- 8)  $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z))$
- 9)  $\overline{(x \rightarrow y) \rightarrow ((x \wedge z) \rightarrow (y \wedge z))}$
- 10)  $((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z)) \rightarrow (x \rightarrow z)$
- 11)  $((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \vee y) \rightarrow z)$
- 12)  $(x \rightarrow y) \wedge x \rightarrow x \vee y \vee z$
- 13)  $\bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$
- 14)  $xy \vee \bar{x}\bar{y} \leftrightarrow (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$
- 15)  $(x \rightarrow y) \oplus (x \rightarrow z)$
- 16)  $\overline{(x \vee y)} \leftrightarrow (x \downarrow y)$

### ***Равносильные формулы алгебры логики.***

Важнейшие равносильности алгебры логики можно разбить на 3 группы:

#### 1. Основные равносильности:

- 1)  $x \wedge x \equiv x$
  - 2)  $x \vee x \equiv x$
  - 3)  $x \wedge 1 \equiv x$
  - 4)  $x \vee 1 \equiv 1$
  - 5)  $x \wedge 0 \equiv 0$
  - 6)  $x \vee 0 \equiv x$
  - 7)  $x \wedge \bar{x} \equiv 0$  – закон противоречия
  - 8)  $\bar{\bar{x}} \equiv x$  – закон снятия двойного отрицания
  - 9)  $x \vee \bar{x} \equiv 1$  – закон исключенного третьего
  - 10)  $x \wedge (y \vee x) \equiv x$
  - 11)  $x \vee (y \wedge x) \equiv x$
- законны идемпотентности
- законны поглощения

#### 2. Равносильности выражающие одни логические операции через другие:

- 1)  $x \leftrightarrow y \equiv (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$
  - 2)  $x \rightarrow y \equiv \bar{x} \vee y$
  - 3)  $\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}$
  - 4)  $\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$
  - 5)  $x \wedge y \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$
  - 6)  $x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}$
- законны де Моргана

#### 3. Равносильности выражающие основные законы алгебры логики:

- 1)  $x \wedge y \equiv y \wedge x$
  - 2)  $x \vee y \equiv y \vee x$
- законь коммутативности
- 3)  $x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$
  - 4)  $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$
- законь ассоциативности
- 5)  $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$  – дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции
  - 5)  $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$  – дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции

### 3. Доказать равносильности:

а) построив таблицы истинности,

б) используя основные равносильности

- 1)  $x \sim y \equiv (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x)$ ;
- 2)  $x \downarrow y \equiv ((x | x) | (y | y)) | ((x | x) | (y | y))$
- 3)  $x \vee (y \sim z) \equiv (x \vee y) \sim (x \vee z)$ ;
- 4)  $x \& (y \sim z) \equiv ((x \& y) \sim (x \& z)) \sim x$ ;
- 5)  $x \rightarrow (y \sim z) \equiv (x \rightarrow y) \sim (x \rightarrow z)$ ;
- 6)  $x \vee (y \rightarrow z) \equiv (x \vee y) \rightarrow (x \vee z)$ ;
- 7)  $x \& (y \rightarrow z) \equiv (x \rightarrow y) \rightarrow (x \& z)$ ;
- 8)  $x \rightarrow (y \vee z) \equiv (x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z)$ ;
- 9)  $x \rightarrow (y \& z) \equiv (x \rightarrow y) \& (x \rightarrow z)$ ;
- 10)  $x \rightarrow (y \rightarrow z) \equiv (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)$
- 11)  $x \rightarrow y \equiv xy \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}$
- 12)  $x \rightarrow (y \rightarrow z) \equiv x \wedge y \rightarrow z$
- 13)  $x \leftrightarrow y \equiv \bar{x} \leftrightarrow \bar{y}$
- 14)  $x \oplus (y \vee z) = (x \oplus y) \vee (x \oplus z)$
- 15)  $x \wedge (y \oplus z) = (x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$
- 16)  $x \oplus (y \rightarrow z) = (x \oplus y) \rightarrow (x \oplus z)$ .

### 4. Используя основные равносильности алгебры логики докажите

равносильность формул  $V$  и  $U$ :

- 1)  $V = (\bar{x} \rightarrow y) \rightarrow (\bar{x} \cdot y \sim (x \oplus y))$ ,  $U = (\overline{x \cdot y} \rightarrow x) \rightarrow y$ ;
- 2)  $V = (x \cdot y \vee (\bar{x} \rightarrow y \cdot z)) \sim ((\bar{x} \rightarrow \bar{y}) \rightarrow z)$ ,  $U = (x \rightarrow y) \oplus (y \oplus z)$ ;
- 3)  $V = (x \oplus y \cdot z) \rightarrow (\bar{x} \rightarrow (y \rightarrow z))$ ,  $U = x \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow x)$ ;
- 4)  $V = (\bar{x} \rightarrow (\bar{y} \rightarrow (x \sim z))) \cdot (x \sim (y \rightarrow (z \vee (x \rightarrow y))))$ ,  $U = (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow x$ ;
- 5)  $V = (\bar{x} \vee \bar{y} \cdot z) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow ((y \vee z) \rightarrow \bar{x}))$ ,  $U = (x \rightarrow y) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow \bar{x})$ ;
- 6)  $V = (x \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \cdot z) \oplus ((y \rightarrow z) \rightarrow \bar{x} \cdot y)$ ,  $U = (x \cdot (\bar{y} \cdot \bar{z}) \oplus y) \oplus z$ ;
- 7)  $V = x \rightarrow ((\bar{x} \cdot \bar{y} \rightarrow (\bar{x} \cdot \bar{z} \rightarrow y)) \rightarrow y) \cdot z$ ,  $U = \overline{x \cdot (y \rightarrow \bar{z})}$ ;
- 8)  $V = \overline{(x \sim y) \rightarrow (x \rightarrow \bar{z})} \vee (x \oplus \bar{y} \cdot z)$ ,  $U = x \sim (z \rightarrow y)$ ;
- 9)  $V = \overline{(x \vee \bar{y} \cdot \bar{z}) \cdot (\bar{x} \rightarrow \bar{y} \cdot z)} \cdot (x \rightarrow (y \sim z))$ ,  $U = ((x \rightarrow y) \sim (y \rightarrow (x \rightarrow z))) \oplus x \cdot (y \cdot z)$ ;

$$10) V = \overline{((x \vee y) \rightarrow y \cdot z) \vee (y \rightarrow x \cdot z) \vee (x \rightarrow (\bar{y} \rightarrow z))}, \quad U = (x \rightarrow y) \vee z.$$

$$11) V = (((x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)) \oplus ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y))), \quad U = (x \oplus y)$$

$$12) V = x \downarrow (y|z), \quad U = (x \downarrow y)(x \downarrow z)$$

$$13) V = (x \vee (y \wedge z)) \rightarrow ((x \vee y) \wedge z), \quad U = (x \rightarrow z)$$

$$14) V = ((x \downarrow y) \vee (x|y)) \quad U = (x \& y | (x \oplus y))$$

$$15) V = x \downarrow (y \oplus z) \quad U = (x \downarrow y) \oplus (x \downarrow z)$$

$$16) V = (x|(y|z)) \oplus (y|(x|z)) \oplus (z|(x|y))$$

$$U = (x \rightarrow (y \vee z)) \& (y \rightarrow (x \vee z)) \& (z \rightarrow (x \vee y))$$

### СДНФ, СКНФ.

**Пример 1.** Пусть функция  $f(x_1, x_2, x_3)$  задана таблицей истинности. Запишем ее в виде СДНФ.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f$
0	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Наборов, на которых функция равна 1, три: (0, 1, 0), (1, 0, 0) и (1, 1, 1), поэтому  $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \& x_2 \& \overline{x_3} \vee x_1 \& \overline{x_2} \& \overline{x_3} \vee x_1 \& x_2 \& x_3$ .

**Пример 2.** Пусть  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow (x_3 \sim x_1))$ . Представим ее в виде КНФ, для этого получим таблицу истинности.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_3 \sim x_1$	$x_2 \rightarrow (x_3 \sim x_1)$	$f$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1



Функция равна нулю только на наборе (1, 1, 0), поэтому

$$f(x_1 x_2 x_3) = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3.$$

**Пример3:** Следующую формулу привести к СДНФ, предварительно приведя её равносильными преобразованиями к ДНФ:  $A = a \wedge (b \wedge c \rightarrow a \wedge b)$

Решение:

$$A \equiv a \wedge (b \wedge c \rightarrow a \wedge b) \equiv a (\overline{b \wedge c} \vee a \wedge b) \equiv a (\overline{b} \vee \overline{c} \vee a \wedge b) \equiv a \overline{b} \vee a \overline{c} \vee a b - \text{ДНФ } A$$

$$A \equiv \text{ДНФ } A \equiv (a \overline{b} \wedge (c \vee \overline{c})) \vee (a \overline{c} \wedge (b \vee \overline{b})) \vee (a b \wedge (c \vee \overline{c})) \equiv a \overline{b} c \vee a \overline{b} \overline{c} \vee a b \overline{c} \vee a \overline{b} \overline{c} \vee a b c \vee a b \overline{c} \equiv a \overline{b} c \vee a \overline{b} \overline{c} \vee a b \overline{c} \vee a b c \equiv \text{СДНФ } A.$$

**Пример4:** Следующую формулу привести к СКНФ, предварительно приведя её равносильными преобразованиями к КНФ:  $A = a \wedge (b \wedge c \rightarrow a \wedge b)$ .

Решение:

$$A \equiv a \wedge (b \wedge c \rightarrow a \wedge b) \equiv a (\overline{b \wedge c} \vee a \wedge b) \equiv a (\overline{b} \vee \overline{c} \vee a \wedge b) \equiv a (b \vee \overline{c} \vee b) \equiv a - \text{КНФ } A$$

$$\begin{aligned} A \equiv \text{КНФ } A &\equiv a \vee (b \vee \overline{b}) \equiv (a \wedge \overline{b}) \wedge (a \wedge b) \equiv \\ &\equiv ((a \wedge \overline{b}) \vee (c \vee \overline{c})) \wedge ((a \wedge b) \vee (c \vee \overline{c})) \equiv \\ &\equiv (a \vee \overline{b} \vee c) \wedge (a \vee \overline{b} \vee \overline{c}) \wedge (a \vee b \vee \overline{c}) \wedge (a \vee b \vee c) \equiv \text{СКНФ } A. \end{aligned}$$

5. Используя дистрибутивный закон перейти от заданной КНФ формулы A к ДНФ:

$$1) A = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \cdot (x_1 \vee x_3) \cdot (\overline{x_2} \vee \overline{x_3});$$

$$2) A = x_1 \cdot (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \cdot (x_2 \vee \overline{x_3});$$

$$3) A = (x_1 \vee \overline{x_2}) \cdot (x_1 \vee \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3);$$

$$4) A = (\overline{x_1} \vee x_2) \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_1} \vee x_3) \cdot (x_2 \vee x_3);$$

$$5) A = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \cdot (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee x_3);$$

$$6) A = (x_1 \vee \overline{x_2}) \cdot (x_2 \vee \overline{x_3}) \cdot (x_2 \vee x_4) \cdot (x_3 \vee \overline{x_4});$$

$$7) A = (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4) \cdot (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \cdot (x_1 \vee x_4).$$

6. Используя дистрибутивный закон перейти от заданной ДНФ формулы A к ее КНФ:

$$1) A = \overline{x_1} \overline{x_2} \vee x_3;$$

$$2) A = x_1 \overline{x_2} \vee x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_2} x_3;$$

$$3) A = \overline{x_1} \vee x_2 x_3 \vee \overline{x_2} \overline{x_3};$$

$$4) A = \overline{x_1} \vee x_2 \vee x_1 \overline{x_2} x_3;$$

$$5) A = \overline{x_1} \overline{x_2} \vee \overline{x_2} \vee x_2 \overline{x_3};$$

$$6) A = x_1 x_2 \vee x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_2} x_4 \vee x_3 x_4;$$

$$7) A = x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_4;$$

$$8) A = x_1 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4.$$

7. Привести к ДНФ( СДНФ), КНФ( СКНФ) следующих формул:

$$1) (x_1 \oplus x_2);$$

$$2) x_1 \downarrow x_2;$$

$$3) (x_1 \vee x_2) \rightarrow x_3;$$

$$4) x_1 x_2 \oplus x_3;$$

$$5) (x_1 \rightarrow x_2) \oplus (x_1 | x_2 x_3);$$

$$6) \overline{(x | \bar{y})} \oplus \overline{(z \rightarrow \bar{x})};$$

$$7) ((x \oplus y) | \bar{z}) \& (\bar{y} \rightarrow z);$$

$$8) (z \rightarrow x) \oplus (x | \bar{y});$$

$$9) (((x \downarrow y) \rightarrow z) \oplus y);$$

$$10) (x \vee \bar{y} \rightarrow x \wedge z) \rightarrow (\overline{(x \rightarrow \bar{x})}) \vee y \wedge \bar{z};$$

$$11) (a \wedge b \rightarrow b \wedge c) \rightarrow (((a \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow b)));$$

$$12) (\bar{a} \rightarrow c) \rightarrow (\overline{\bar{b} \rightarrow \bar{a}});$$

$$13) (\bar{a} \rightarrow \bar{b}) \rightarrow (b \wedge c \rightarrow a \wedge c);$$

$$14) (x_1 \rightarrow x_2 x_3 x_4) \cdot (x_3 \rightarrow x_1 \bar{x}_2);$$

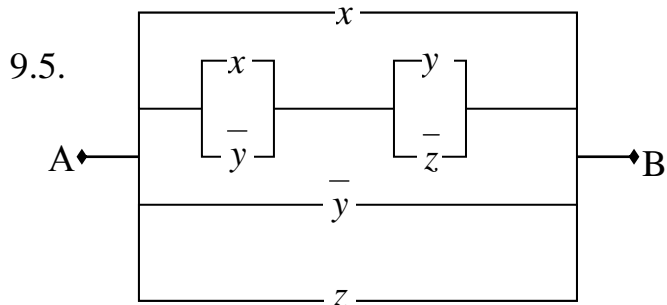
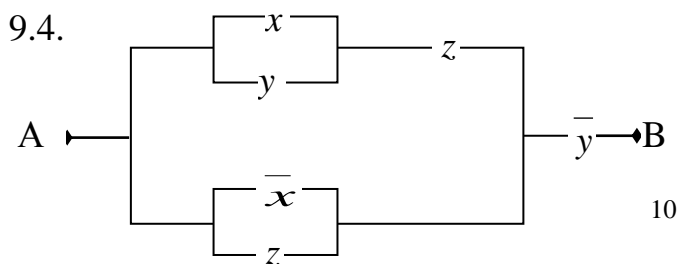
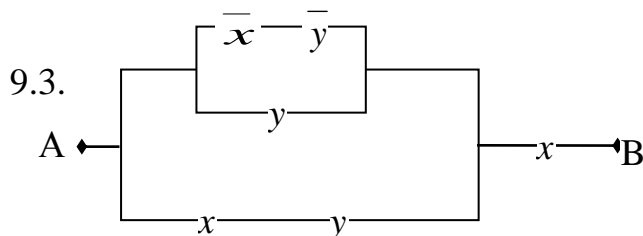
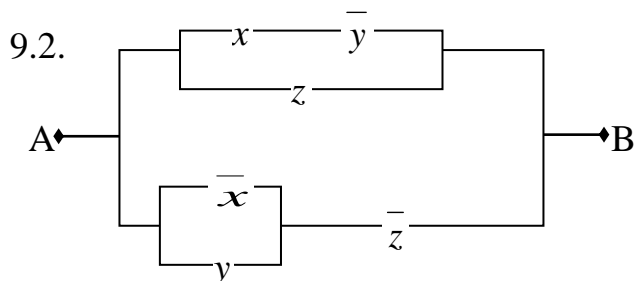
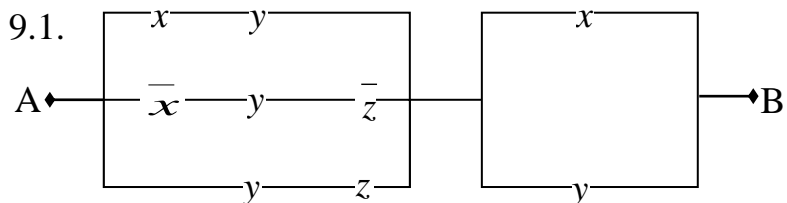
$$15) (x_1 \oplus x_2) \cdot (x_3 \rightarrow \bar{x}_2 x_4);$$

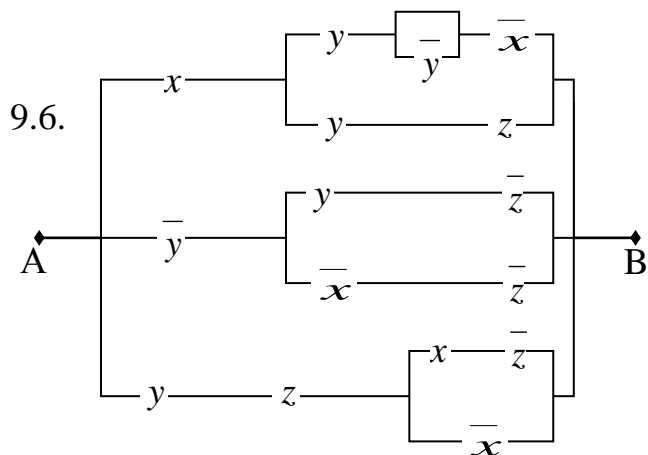
$$16) x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3 x_4);$$

### Приложения алгебры логики.

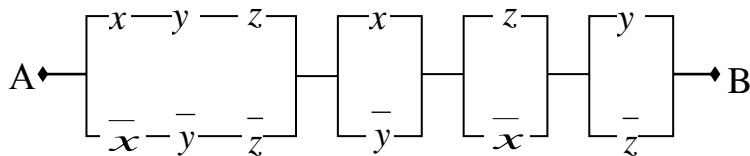
#### 1. Приложения алгебра логики к релейно- контактным схем.

9. Найти функции проводимости следующих схем, если возможно упростить схемы:





9.7.



## 2. Решение логических задач с помощью алгебры логики.

**Пример 1.** Четыре ученицы: Маша (М), Нина (Н), Ольга (О) и Поля (П) участвовали в соревнованиях и заняли первые 4 места. На вопрос, кто какое место занял, было дано 3 ответа:

- 1) О – второе, П – третье;
- 2) О – первое, Н – второе;
- 3) М – второе, П – четвертое.

В каждом из этих ответов одна часть верна, а другая нет. Какое место заняла каждая девушка?

**Решение.** Введем булевы переменные:  $x$  – «О – второе»,  $y$  – «П – третье»,  $z$  – «О – первое»,  $t$  – «Н – второе»,  $u$  – «М – второе»,  $v$  – «П – четвертое». Получим систему уравнений:  $x\bar{y} \vee \bar{x}y = 1$ , так как если  $x$  истинно, тогда  $y$  ложно, а  $y$  – истинно и  $x\bar{y} = 1$ , либо  $\bar{x}y = 1$ . Аналогично,  $z\bar{t} \vee \bar{z}t = 1, u\bar{v} \vee \bar{u}v = 1$ . Удобнее записать эту систему следующим образом:  $x \oplus y = 1, z \oplus t = 1, u \oplus v = 1$ .

Отсюда  $(x \oplus y)(z \oplus t)(u \oplus v) = 1$  или  $(xy \oplus yz \oplus xt \oplus yt)(u \oplus v) = 1$ , окончательно,  $xzu \oplus yzu \oplus xtu \oplus ytu \oplus xzv \oplus yzv \oplus xtv \oplus ytv = 1$ .

Кроме того,  $xz = 0, yv = 0, xu = 0, xt = 0, ut = 0$ , так как одна ученица не может занять 2 места и одно место не может быть занято двумя ученицами. В результате в последнем уравнении останется единственный ненулевой член  $yzu = 1$ . Отсюда  $y = 1, z = 1, u = 1$  или О – первая, М – вторая, П – третья, Н – четвертая.

**Пример 2.** В кафе встретились три друга: скульптор Белов, скрипач Чернов и художник Рыжов. «Замечательно, что один из нас имеет белые, один черные, а один

рыжие волосы, но ни у кого цвет волос не совпадает с фамилией», – заметил черноволосый. «Ты прав», – сказал Белов. Какой цвет волос у художника?

**Решение.** Составим таблицу.

Фамилия	Б	Ч	Р
Цвет волос			
б	0		
ч		0	
р			0

Невозможное сочетание фамилии и цвета волос будем обозначать 0, возможное 1.

Очевидно, что в каждой строке и в каждом столбце должна быть только одна 1.

Получим два варианта.

Фамилия	Б	Ч	Р
Цвет волос			
б	0	0	1
ч	1	0	0
р	0	1	0

Фамилия	Б	Ч	Р
Цвет волос			
б	0	1	0
ч	0	0	1
р	1	0	0

Из условия задачи ясно, что черноволосый не Белов, поэтому первый вариант не подходит. Следовательно, Белов – рыжий, Чернов – белый, Рыжов – черный.

10. В школе, перешедшей на самообслуживание, четырем старшеклассникам:

Андрееву, Костину, Савельеву и Давыдову поручили убрать 7-ой, 8-ой, 9-ый и 10-ый классы. При проверке оказалось, что 10-ый класс убран плохо. Не ушедшие домой ученики сообщили о следующем:

1. Андреев: «Я убирал 9-ый класс, а Савельев - 7-ой».
2. Костин: «Я убирал 9-ый класс, а Андреев - 8-ой».
3. Савельев: «Я убирал 8-ой класс, а Костин - 10-ый».

Давыдов уже ушел домой. В дальнейшем выяснилось, что каждый ученик в одном из двух высказываний говорил правду, а во втором ложь. Какой класс убирал каждый ученик?

11. Семья, состоящая из отца  $A$ , матери  $B$  и трех дочерей  $C, D, E$  купила телевизор.

Условились, что в первый вечер будут смотреть передачи в таком порядке:

1. Когда отец  $A$  смотрит передачу, то мать  $B$  делает то же.
2. Дочери  $D$  и  $E$ , обе или одна из них, смотрят передачу.
3. Из двух членов семьи - мать  $B$  и дочь  $C$  - смотрят передачу одна и только одна.

4. Дочери  $C$  и  $D$  или обе смотрят, или обе не смотрят.

5. Если дочь  $E$  смотрит передачу, то отец  $A$  и дочь  $D$  делают то же.

Кто из членов семьи в этот вечер смотрит передачу?

12. Определите, кто из четырех студентов сдал экзамен, если известно:

1. Если первый сдал, то и второй сдал.

2. Если второй сдал, то третий сдал или первый не сдал.

3. Если четвертый не сдал, то первый сдал, а третий не сдал.

4. Если четвертый сдал, то и первый сдал.

13. Четыре друга - Антонов ( $A$ ), Вехов ( $B$ ), Сомов ( $C$ ), Деев ( $D$ ) решили провести каникулы в четырех различных городах - Москве, Одессе, Киеве и Ташкенте.

Определите, в какой город должен поехать каждый из них, если имеются следующие ограничения: Если  $A$  не едет в Москву, то  $C$  не едет в Одессу.

1. Если  $B$  не едет ни в Москву, ни в Ташкент, то  $A$  едет в Москву.

2. Если  $C$  не едет в Ташкент, то  $B$  едет в Киев.

3. Если  $D$  не едет в Москву, то  $B$  не едет в Москву.

5. Если  $D$  не едет в Одессу, то  $B$  не едет в Москву.

Список литературы:

1. Л.М. Лихтарников, Т.Г. Сукачева Математическая логика/ Курс лекций/-СПб.: Издательство «Лань», 1998.
2. С.Д. Шапорев Математическая логика. Курс лекций и практических заданий. - СПб. БХВ- Петербург, 2005.
3. В.Ф. Пономарев Математическая логика. часть 1. Логика высказываний. Логика предикатов. Учебное пособие – Калининград: КГТУ, 2001, с.140